

# Probabilités et statistiques de l'erreur de mesure

Pr. A. ILIADIS

Laboratoire de Pharmacocinétique

U.F.R. de Pharmacie, Université de la Méditerranée

iliadis@pharmacie.univ-mrs.fr <http://pharmapk.pharmacie.univ-mrs.fr/>

Résumé du cours dispensé dans le cadre du Master Professionnel intitulé Prévention des Risques et Nuisances Technologiques

## 1 Introduction

Une expérience est qualifiée d'aléatoire si l'on ne peut pas prévoir par avance sa réponse et si, répétée dans des conditions identiques, elle peut donner lieu à des résultats différents. Les probabilités sont des outils mathématiques, utilisées pour modéliser les phénomènes dus au hasard et plus particulièrement pour quantifier les chances de réalisation des résultats issus d'une *expérience aléatoire*. Les résultats étant imprévisibles, la notion clé est la *variabilité* de la réponse de l'expérience aléatoire. En fonction du plan d'expérience, les facteurs qui induisent les aspects aléatoires peuvent contribuer d'une manière plus ou moins complexe.

Par exemple, un opérateur veut mesurer la masse d'un litre de liquide au moyen d'un flacon de verre portant un repère qui indique le volume d'un litre. Pour cela, il pèse le flacon vide, le remplit de liquide et le pèse de nouveau. La différence entre les résultats de deux pesées est prise comme valeur de la masse d'un litre de liquide. Si l'opérateur continue à répéter les mesures, il va obtenir une série de résultats plus ou moins dispersés suivant son habileté, le diamètre du col du flacon à l'endroit du repère, la nature du liquide qui mouille plus ou moins le verre, la qualité de la balance, etc. Voilà donc un ensemble de facteurs qui influencent la qualité de la mesure finale.

La présence simultanée au cours d'une expérience aléatoire des variabilités inter- et intra-individuelles est un exemple des facteurs aléatoires qui se mélangent. Analyser les observations de la taille d'un groupe d'individus pose le problème de la qualité de mesure, on parle alors de *précision*, et des différences entre les individus, on parle alors de *dispersion*. La description probabiliste de la dispersion est fortement influencée par la qualité de mesure.

Une première partie de l'exposé est consacrée aux opérations concernant les variables aléatoires en général. La deuxième partie traite plus spécifiquement la question de la propagation des erreurs de mesure.

## 2 Outils mathématiques pour le calcul des probabilités

En calcul des probabilités, deux questions se posent:

- $\Pr [x_1 \leq X < x_2] = ?$  dans le sens de la *prévision* et
- $\Pr [x_1 \leq X < ?] = 1 - \alpha$  dans le sens de l'*estimation*,

$x_1$  et  $x_2$  étant deux niveaux ( $x_1 < x_2$ ) de la variable aléatoire appelée  $X$  et  $\alpha$  une probabilité ( $0 < \alpha < 1$ ). On peut répondre à ces deux questions par le même outil mathématique qui prend deux formes différentes selon que la variable aléatoire est discrète ou continue:

- Variable aléatoire *discrète* (p.ex. nombre d'animaux restant malades après traitement):

$$\Pr [x_1 \leq X < x_2] = \sum_{x_1 \leq x_i < x_2} f(x_i) = F(x_2) - F(x_1)$$

$f(x)$  est la *fonction de distribution des probabilités* et  $F(x)$  est la *fonction cumulative des probabilités* (CDF).

- Variable aléatoire *continue* (p.ex. taille tumorale après traitement):

$$\Pr [x_1 \leq X < x_2] = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = F(x_2) - F(x_1)$$

$f(x)$  est la *fonction de densité des probabilités* (PDF) et  $F(x)$  est la *fonction cumulative des probabilités* (CDF). Pour une variable aléatoire continue, ces deux fonctions sont liées par la relation:

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

Parmi toutes les fonctions mathématiques possibles, celles qui peuvent être utilisées comme modèles de distribution et de densité des probabilités doivent être non-négatives et vérifier les conditions:

$$\sum_i f(x_i) = 1 \quad \text{et} \quad \int_x f(x) dx = 1$$

## 2.1 Caractéristiques des fonctions de probabilité

Les fonctions (aussi appelées modèles ou lois) de distribution et de densité des probabilités sont caractérisés par:

- l'*espérance*  $E[X]$  exprimant la tendance centrale; elle est donnée par:

$$E[X] = \sum_i x_i f(x_i) \quad E[X] = \int_x x f(x) dx$$

respectivement pour une variable discrète et continue. Les propriétés suivantes sont vérifiées pour  $E[X]$ :

$$E[a] = a \quad E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y] \quad (1)$$

Si  $X$  et  $Y$  indépendants:

$$E[XY] = E[X] E[Y]$$

- les *moments* d'ordre  $\varphi$  définis par:

$$M_\varphi[X] = \sum_i \{x_i - E[X]\}^\varphi f(x_i) \quad M_\varphi[X] = \int_x \{x - E[X]\}^\varphi f(x) dx$$

respectivement pour une variable discrète et continue.

- la *variance*  $V[X]$  exprimant la dispersion; elle est égale au moment d'ordre 2:

$$V[X] = M_2[X]$$

Les propriétés suivantes sont vérifiées pour  $V[X]$ :

$$\begin{aligned} V[a] &= 0 & V[aX] &= a^2V[X] \\ V[a+X] &= V[X] & V[X] &= E[X^2] - (E[X])^2 \end{aligned} \quad (2)$$

$$V[aX + bY] = a^2V[X] + b^2V[Y] + 2abCov(X, Y)$$

Dans la relation précédente,  $Cov(X, Y)$  représente la covariance définie par:

$$Cov(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = E[XY] - E[X]E[Y]$$

Si  $X$  et  $Y$  indépendants,  $Cov(X, Y) = 0$ . La relation suivante:

$$|Cov(X, Y)| \leq \sqrt{V[X]V[Y]}$$

est connue comme l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

- l'*asymétrie*  $\Gamma_1[X]$  et l'*aplatissement*  $\Gamma_2[X]$  caractérisant la forme du modèle; ils sont respectivement donnés par:

$$\Gamma_1[X] = \frac{M_3[X]}{M_2[X]^{3/2}} \quad \Gamma_2[X] = \frac{M_4[X]}{M_2[X]^2}$$

## 2.2 Transformation des variables

Soient:

- $p$  variables aléatoires continues  $X_i, i = 1 : p$  distribuées suivant la PDF  $f(x_1, \dots, x_p)$ ,
- $p$  fonctions  $y_j(x_1, \dots, x_p), j = 1 : p$  bijectives à transformation inverse  $x_i(y_1, \dots, y_p)$ ,
- $p$  variables aléatoires continues  $Y_i, i = 1 : p$  obtenues par les fonctions  $Y_i = y_i(X_1, \dots, X_p)$ .

La PDF  $g(y_1, \dots, y_p)$  des  $Y_i$  est donnée par:

$$g(y_1, \dots, y_p) = f[x_1(y_1, \dots, y_p), \dots, x_p(y_1, \dots, y_p)] J(y_1, \dots, y_p)$$

où  $J(y_1, \dots, y_p)$  désigne le Jacobien défini par:

$$J(y_1, \dots, y_p) = \left| \begin{bmatrix} \partial_{y_1} x_1 & \partial_{y_2} x_1 & \dots & \partial_{y_p} x_1 \\ \partial_{y_1} x_2 & \partial_{y_2} x_2 & \dots & \partial_{y_p} x_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \partial_{y_1} x_p & \partial_{y_2} x_p & \dots & \partial_{y_p} x_p \end{bmatrix} \right|$$

Dans cette expression l'opérateur  $\partial_y x$  désigne la dérivée partielle de  $x$  par rapport à  $y$  et  $||$ , le déterminant. Certains résultats exacts sont disponibles quand la transformation est linéaire et les distributions des variables d'origine sont normales.

**Exercice 1** *Surface d'un rectangle (1)*

On souhaite obtenir la PDF de la surface  $S$  d'un rectangle, se basant sur les mesures de ses côtés  $L$  et  $l$ . Pour compléter la bijection de la transformation, on associe à ces calculs, l'identité de  $l$ . Nous aurons:

$$L \rightarrow X_1 \quad l \rightarrow X_2 \quad \text{et} \quad S = Ll \rightarrow Y_1 \quad l \rightarrow Y_2$$

puis les transformations:

$$y_1 = x_1 x_2 \quad y_2 = x_2 \quad \text{et} \quad x_1 = \frac{y_1}{y_2} \quad x_2 = y_2$$

avec comme dérivées partielles:

$$\partial_{y_1} x_1 = \frac{1}{y_2} \quad \partial_{y_2} x_1 = -\frac{y_1}{y_2^2} \quad \partial_{y_1} x_2 = 0 \quad \partial_{y_2} x_2 = 1$$

et Jacobien:

$$J(y_1, y_2) = \frac{1}{y_2}$$

pour écrire:

$$g(y_1, y_2) = \frac{1}{y_2} f\left(\frac{y_1}{y_2}, y_2\right)$$

Pour simplifier l'exemple, nous supposons que  $f(x_1, x_2)$ , la PDF conjointe de  $L$  et  $l$ , est uniforme sur les intervalles:

$$a_1 \leq x_1 < a_2 \quad \text{et} \quad b_1 \leq x_2 < b_2$$

pour écrire:

$$f(x_1, x_2) = f_0 = \frac{1}{(a_2 - a_1)(b_2 - b_1)}$$

Les intervalles de définition pour  $Y_1$  et  $Y_2$  sont:

$$a_1 b_1 \leq y_1 < a_2 b_2 \quad \text{et} \quad b_1 \leq y_2 < b_2$$

On constate bien que:

$$g(y_1, y_2) = \frac{1}{y_2} f_0$$

n'est plus uniforme. L'espérance de  $Y_1$  (surface) est égale à:

$$E[Y_1] = f_0 \int_{a_1 b_1}^{a_2 b_2} \int_{b_1}^{b_2} \frac{y_1}{y_2} dy_1 dy_2 = \frac{1}{2} \frac{(a_2 b_2)^2 - (a_1 b_1)^2}{(a_2 - a_1) - (b_2 - b_1)} \ln \frac{b_2}{b_1}$$

et sa variance:

$$V[Y_1] = f_0 \int_{a_1 b_1}^{a_2 b_2} \int_{b_1}^{b_2} \frac{1}{y_2} \{y_1 - E[Y_1]\}^2 dy_1 dy_2 = \frac{1}{3} \frac{(a_2 b_2 - E[Y_1])^3 - (a_1 b_1 - E[Y_1])^3}{(a_2 - a_1) - (b_2 - b_1)} \ln \frac{b_2}{b_1}$$

Même si la PDF conjointe d'origine est simple (uniforme), les expressions des caractéristiques de la PDF après transformation élémentaire des variables sont très complexes.

### 3 Statistique exploratoire - échantillon

Comment obtenir ces outils-modèles mathématiques  $f(x)$ ? Sans doute, après avoir analysé la *population* (ensemble des résultats possibles issus d'une expérience aléatoire) de la variable aléatoire  $X$ . Deux cas de figure se présentent:

- Population dénombrable: analyser l'expérience aléatoire et appliquer l'*approche théorique*.
- Population de taille infinie: utiliser l'*approche expérimentale* qui consiste à:
  - Échantillonner (procédure aléatoire) pour observer  $x_i, i = 1 : n$ .
  - Analyser les propriétés de l'échantillon et les résumer par des:
    - \* graphiques, les histogrammes,
    - \* indices numériques qui caractérisent:
      - la tendance centrale, t.q.  $\bar{x}$ , la moyenne arithmétique,
      - la dispersion, t.q.  $s^2$ , la variance de l'échantillon,
      - la forme, t.q.  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ , coefficients d'asymétrie et d'aplatissement, respectivement.
  - Extrapoler ces propriétés pour définir une fonction mathématique  $f(x)$  qui les vérifie.

On se place dans le cadre d'une population de taille infinie, sinon le problème se réduit à un problème d'analyse combinatoire ou de recensement.

#### 3.1 Indices numériques associés à l'échantillon

Les caractéristiques de l'échantillon de taille  $n$  peuvent être résumées par:

- la *moyenne arithmétique* exprimant la tendance centrale des observations:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

- les *moments arithmétiques* d'ordre  $\varphi$  définis par:

$$\mu_\varphi = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^\varphi$$

- la *variance de l'échantillon* exprimant la variabilité des observations:

$$s^2 = \mu_2$$

dont la racine positive  $s$  est appelée *écart-type*,

- les *coefficients d'asymétrie*  $\gamma_1 [X]$  et d'*aplatissement*  $\gamma_2 [X]$  caractérisant la forme de la distribution des observations. Ils sont respectivement donnés par:

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} \quad \gamma_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$$

Les propriétés de l'espérance et de la variance qui caractérisent les fonctions de probabilités sont respectivement valables pour la moyenne et la variance calculées à partir des observations.

Plus particulièrement en présence de deux observations concomitantes  $(x_i, y_i), i = 1 : n$ , la moyenne arithmétique de l'observation combinée  $z_i = ax_i + by_i$  sera donnée par:

$$\bar{z} = a\bar{x} + b\bar{y} \quad (3)$$

où  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$  sont les moyennes des observations. La variance de l'observation combinée est donnée par:

$$s_z^2 = a^2 s_x^2 + b^2 s_y^2 + 2abs_{xy} \quad (4)$$

où  $s_x$  et  $s_y$  sont respectivement les écart-types de  $x_i$  et de  $y_i$ , et  $s_{xy}$  la covariance entre  $x_i$  et  $y_i$  définie par:

$$s_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x}\bar{y}$$

Les covariances peuvent être interprétées en termes de *coefficients de corrélation*  $r_{xy}$  définis par:

$$r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'applique à  $s_{xy}$  pour écrire  $|s_{xy}| \leq s_x s_y$  et donc  $|r_{xy}| \leq 1$ . Pour les valeurs extrêmes de  $s_{xy}$  et pour  $s_{xy} = 0$ , nous avons:

$$s_z = \begin{cases} as_x + bs_y & \text{si } s_{xy} = s_x s_y \\ \sqrt{a^2 s_x^2 + b^2 s_y^2} & \text{si } s_{xy} = 0 \\ |as_x - bs_y| & \text{si } s_{xy} = -s_x s_y \end{cases} \quad (5)$$

Par conséquent si  $a, b > 0$ , pour des observations corrélées positivement, l'écart-type de l'observation combinée  $z$  est supérieur à l'écart-type correspondant à des observations corrélées négativement.

### 3.2 Echantillonnage

Cet aspect revient sur la constitution d'un échantillon représentatif de la population à partir de laquelle il a été tiré. En effet, on pourrait imaginer plusieurs échantillons  $E_1, E_2, \dots$  issus de la même population. L'analyse de chacun donnera des résultats différents:  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots$  puis  $s_1^2, s_2^2, \dots$  etc. C'est ainsi que  $\bar{x}$ ,  $s^2$  et les autres indices numériques deviennent des véritables variables aléatoires. La question que nous posons est quelles sont les caractéristiques distributionnelles des indices numériques de l'échantillon? Pour une taille donnée d'un échantillon, l'étude distributionnelle de ces indices permet à la fois le calcul des valeurs les plus probables et le calcul des intervalles de confiance de ces valeurs.

## 4 Statistique inférentielle - population

Parmi les modèles disponibles  $f(x)$ , nous devons choisir celui qui est compatible avec les caractéristiques de l'échantillon. Ce choix se fait en deux étapes:

- Choix structurel: Fixer la forme mathématique en fonction du contexte expérimental, de la forme de l'histogramme et surtout en fonction des indices de forme  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ . Par exemple, si  $\gamma_1 \approx 0$  et  $\gamma_2 \approx 3$  on choisit la PDF normale:

$$f_N(x; m, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{x - m}{\sigma} \right)^2 \right] \quad \text{ou} \quad X \sim N(m, \sigma^2)$$

car sous l'hypothèse de normalité, nous avons  $\Gamma_1[X] = 0$  et  $\Gamma_2[X] = 3$ .  $m$  et  $\sigma^2$  sont les deux paramètres de la PDF dont les valeurs numériques doivent être calculées à partir des observations sur l'échantillon. Ces paramètres expriment les caractéristiques de la PDF, car  $E[X] = m$  et  $V[X] = \sigma^2$ . Pour un autre exemple concernant une variable aléatoire discrète, si  $\bar{x} \approx s^2$ , on choisirait la distribution de Poisson:

$$f_P(x; \lambda) = \frac{\lambda^x}{x!} \exp(-\lambda) \quad \text{ou} \quad X \sim P(\lambda)$$

car elle possède la propriété  $E[X] = V[X] = \lambda$ .

- Choix paramétrique: Assigner des valeurs numériques aux paramètres de la structure choisie. Par exemple pour la PDF normale, trouver les valeurs de ses paramètres  $m$  et  $\sigma^2$ . La théorie de l'estimation, et plus précisément le principe du Maximum de Vraisemblance, conduit au choix des valeurs numériques des paramètres de la structure choisie. L'estimation des valeurs par le Maximum de Vraisemblance fera l'objet du paragraphe suivant.

A la fin, on dispose d'un modèle complet  $f_N(x; m, \sigma^2)$  ou  $f_P(x; \lambda)$  qui peut être utilisé comme il a été indiqué en introduction.

## 4.1 Estimation du Maximum de Vraisemblance

Soit l'échantillon observé  $x_i, i = 1 : n$  dont la moyenne arithmétique est  $\bar{x}$  et la variance  $s^2$ . Pour obtenir la meilleure estimation des paramètres de la distribution (qui a donné naissance à cet échantillon), R.A. Fisher a proposé la technique dite de "l'estimation des valeurs les plus probables", connue aussi sous le nom du Maximum de Vraisemblance. Pour illustrer la méthode, nous supposerons que la distribution  $f(x)$  contient le paramètre  $\theta$  (par exemple  $m$  ou  $\sigma^2$  pour  $f_N(x; m, \sigma^2)$ , ou encore  $\lambda$  pour  $f_P(x; \lambda)$ ), c'est-à-dire  $f(x; \theta)$ . Si les observations  $x_i$  sont indépendantes,  $f(x; \theta)$  donnera sur leur ensemble:

$$L = f(x_1, \dots, x_n; \theta) = f(x_1; \theta) \dots f(x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta)$$

$L$  est la fonction de la vraisemblance qu'on tâchera de maximiser par rapport à l'inconnu  $\theta$ . Ceci revient aussi à maximiser  $\ln L$ :

$$\hat{\theta} = \arg \max \sum_{i=1}^n \ln f(x_i; \theta)$$

Chercher la valeur particulière  $\hat{\theta}$  qui maximise  $\ln L$  revient à chercher la solution de l'équation  $\partial_{\theta} \ln L = 0$ .

### 4.1.1 Distribution normale

On aura:

$$\ln L = \sum_{i=1}^n \left\{ -\ln(\sigma\sqrt{2\pi}) - \frac{1}{2} \left( \frac{x_i - m}{\sigma} \right)^2 \right\} = \frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2$$

- Associer  $m$  à  $\theta$ :

$$\partial_m \ln L = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - m) = 0 \quad \text{si} \quad m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}$$

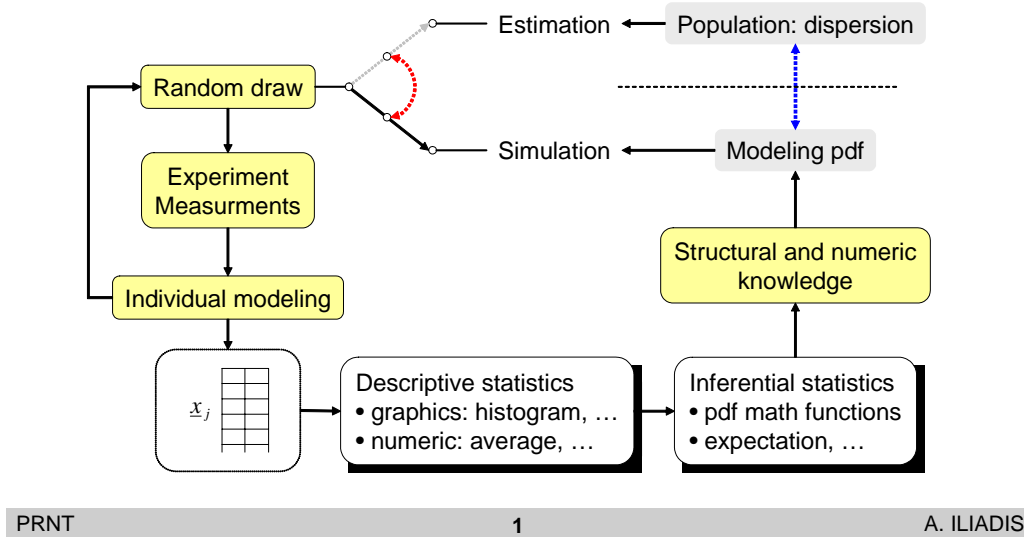


Figure 1: Statistiques exploratoires et inférentielles

- Associer  $\sigma^2$  à  $\theta$ :

$$\partial_{\sigma^2} \ln L = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{n}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 = 0 \quad \text{si} \quad \sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 = s^2$$

Le principe du Maximum de Vraisemblance nous permet ainsi d'affecter  $\bar{x}$  à  $m$  (tous les deux exprimant la tendance centrale) et  $s^2$  à  $\sigma^2$  (tous les deux exprimant la dispersion).

#### 4.1.2 Distribution de Poisson

On aura:

$$\ln L = \sum_{i=1}^n [\ln(\lambda^{x_i}) - \lambda - \ln(x_i!)]$$

et on associera  $\lambda$  à  $\theta$ :

$$\partial_{\lambda} \ln L = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n x_i - n = 0 \quad \text{si} \quad \lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}$$

La figure 1 illustre l'organisation d'une étude incluant statistique exploratoire et inférentielle. La figure 2 codifie les procédures de comparaison entre échantillon et fonctions de probabilités pour modéliser une variable aléatoire.



Analysis	Sample	Model	Identification
Graphic	<p>histogram</p>	<p>pdf, cdf</p>	Structural
Numeric <ul style="list-style-type: none"> <li>Central tendency</li> <li>Dispersion</li> <li>Form</li> </ul>	$\bar{x}$ $s^2$ $\gamma_1, \gamma_2$	$E[X]$ $V[X]$ $\Gamma_1[X], \Gamma_2[X]$	Parametric
PRNT	2		A. ILIADIS

Figure 2: Modélisation d'une variable aléatoire après échantillonnage

## 4.2 Intervalles de confiance

Soit  $\alpha$  la probabilité (en principe faible) pour que  $X$  se réalise à l'extérieur de l'intervalle  $[L_g, L_d]$ :

$$\Pr \{X < L_g \text{ ou } X \geq L_d\} = \alpha$$

ou

$$\Pr \{L_g \leq X < L_d\} = 1 - \alpha$$

$L_g$  et  $L_d$  sont appelés les limites de confiance et  $[L_g, L_d]$ , l'intervalle de confiance associé au niveau  $\alpha$ . En général, on partitionne  $\alpha$  en  $\alpha/2$  à gauche de  $L_g$  et en  $\alpha/2$  à droite de  $L_d$ . La relation précédente peut être alors écrite:

$$\Pr \{L_g \leq X < L_d\} = F(L_d) - F(L_g) = 1 - \alpha$$

et

$$F(L_g) = \frac{\alpha}{2} \quad \text{et} \quad F(L_d) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

et par inversion de la fonction CDF:

$$L_g = F^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad \text{et} \quad L_d = F^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \quad (6)$$

### 4.2.1 Variables aléatoires continues

Dans le cas d'un modèle général  $f(x)$ , un certain nombre de résultats existent, mais nous ne ferons pas mention dans ce cours. Ici, nous allons présenter les résultats obtenus sous l'hypothèse d'un modèle PDF normal et établir les intervalles de confiance sur ses paramètres  $m$  et  $\sigma^2$ .

1. Dispersion exprimée par  $\sigma^2$ : Ayant à notre disposition  $s^2$ , l'objectif est d'obtenir un intervalle de confiance pour  $\sigma^2$ . On établit que:

$$\left[ \frac{ns^2}{\sigma^2} \right] \sim \chi^2(n-1) \quad (7)$$

En d'autres termes, l'intervalle de confiance pour  $\sigma^2$  peut être calculé à l'aide de  $\chi^2$  à  $n-1$  degrés de liberté et en utilisant  $s^2$  calculé à partir de l'échantillon de taille  $n$ . Soit  $F_{\chi^2(n-1)}$  la CDF de  $\chi^2(n-1)$ . La figure 3 illustre cette CDF pour  $n = 10, 20, 30$ .

2. Tendence centrale exprimée par  $m$ : Ayant à notre disposition  $\bar{x}$ ,  $s^2$  etc., l'objectif est d'obtenir un intervalle de confiance pour  $m$ . On établit que:

$$\left[ \frac{\bar{x} - m}{\sigma} \sqrt{n} \right] \sim N(0, 1)$$

On se rend compte dans cette relation que la réponse dépend de  $\sigma$ . Si  $\sigma$  est connu, il suffit tout simplement d'utiliser sa valeur; le cas le plus intéressant est quand  $\sigma$  est inconnu. Il doit alors être remplacé par son estimation  $s$ , mais la relation précédente doit être modifiée en conséquence. Ceci peut se faire à l'aide de la distribution de Student  $t$ . On obtient:

$$\left[ \frac{\bar{x} - m}{s} \sqrt{n-1} \right] \sim t(n-1) \quad (8)$$

C'est ainsi que l'intervalle de confiance pour  $m$  peut être calculé à l'aide de la distribution  $t$  de Student à  $n-1$  degrés de liberté et en utilisant  $\bar{x}$  et  $s^2$  calculés à partir de l'échantillon de taille  $n$ . Soit  $F_{t(n-1)}$  la CDF de  $t(n-1)$ . La figure 4 illustre cette CDF pour  $n = 5, 30$ .

#### 4.2.2 Variables aléatoires discrètes

Dans le cas d'un modèle général  $f(x)$ , un certain nombre de résultats existent, mais nous ne ferons pas mention dans ce cours. Nous présenterons à titre d'exemple les résultats obtenus sous l'hypothèse d'un modèle de distribution de Poisson,  $P$ . Ayant observé  $x_i, i = 1 : n$ , l'objectif est d'obtenir un intervalle de confiance pour le paramètre inconnu  $\lambda$  qui exprime à la fois la tendance centrale et la dispersion.

On établit que si les variables aléatoires  $X_i, i = 1 : n \sim P(\lambda)$ , leur somme  $S = X_1 + \dots + X_n \sim P(n\lambda)$ . Par ailleurs, la distribution de Poisson  $P$  est liée avec la distribution de  $\chi^2$  par la relation:

$$\Pr\{Y \leq k\} = \Pr\{Z > 2\lambda\} \quad \text{où } Y \sim P(\lambda) \text{ et } Z \sim \chi^2(2(k+1))$$

A l'aide de ces propriétés, nous pouvons successivement écrire:

$$\begin{aligned} \Pr\{S = x_1 + \dots + x_n\} &= \Pr\{S = n\bar{x}\} \\ &= \Pr\{S \leq n\bar{x}\} - \Pr\{S \leq n\bar{x} - 1\} \\ &= \Pr\{2n\lambda < Z_1\} - \Pr\{2n\lambda < Z_2\} \end{aligned}$$

avec  $Z_1 \sim \chi^2(2(n\bar{x} + 1))$  et  $Z_2 \sim \chi^2(2n\bar{x})$ .

Si  $1 - \alpha$  est la probabilité pour que  $S = n\bar{x}$  se réalise, la relation précédente se décompose en:

$$\Pr\{2n\lambda < Z_1\} = 1 - \frac{\alpha}{2} \quad \text{et} \quad \Pr\{2n\lambda < Z_2\} = \frac{\alpha}{2}$$

et

$$F_{\chi^2(2(n\bar{x}+1))}(2nL_d[\lambda]) = 1 - \frac{\alpha}{2} \quad \text{et} \quad F_{\chi^2(2n\bar{x})}(2nL_g[\lambda]) = \frac{\alpha}{2} \quad (9)$$

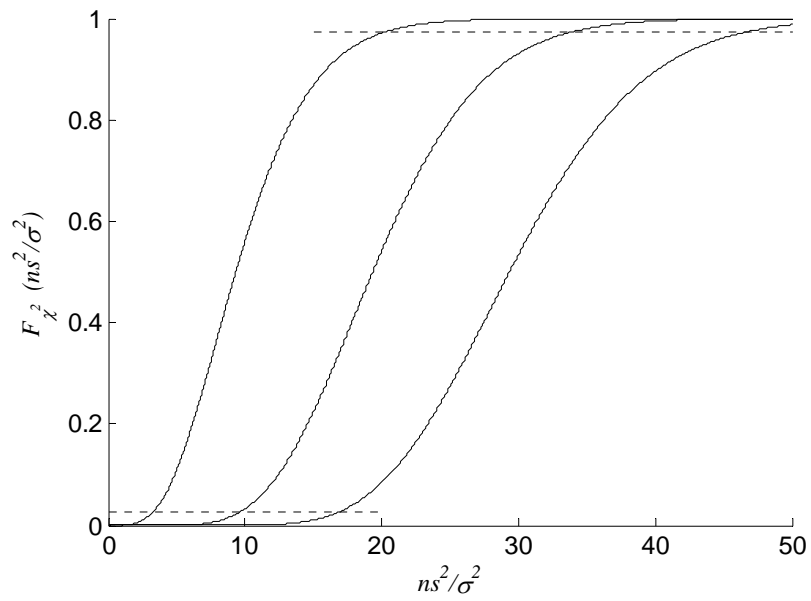


Figure 3: CDF de  $\chi^2$  pour  $n = 10, 20, 30$ .

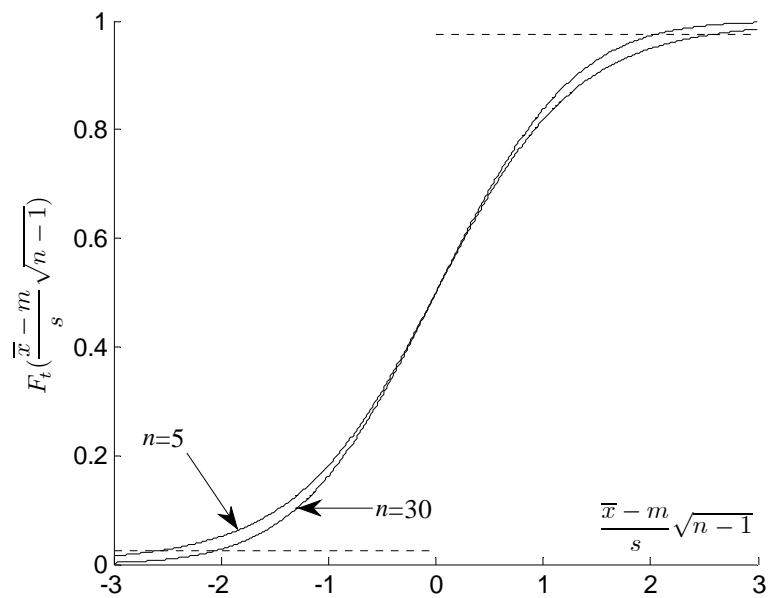


Figure 4: CDF de Student pour  $n = 5, 30$ .

## 5 Applications

### 5.1 Intervalles de confiance sur $\sigma$

D'après la distribution 7, pour un  $\alpha$  fixé et selon la définition 6, les limites de confiance  $L_g$  et  $L_d$  de la variable aléatoire  $\left[\frac{ns^2}{\sigma^2}\right]$  sont:

$$L_d \left[ \frac{ns^2}{\sigma^2} \right] = F_{\chi^2(n-1)}^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) \quad \text{et} \quad L_g \left[ \frac{ns^2}{\sigma^2} \right] = F_{\chi^2(n-1)}^{-1} \left( \frac{\alpha}{2} \right) \quad (10)$$

#### Exercice 2 Intervalles sur la dispersion

Pour  $\alpha = 0.05$ ,  $s^2 = 4$  et  $n = 30$ , calculer les limites de confiance de  $\sigma$ . D'après les tables de distribution  $\chi^2$  et compte tenu de la relation 10, les limites de confiance de  $\left[\frac{ns^2}{\sigma^2}\right]$  sont:

$$\begin{aligned} L_d \left[ \frac{ns^2}{\sigma^2} \right] &= F_{\chi^2(29)}^{-1}(0.975) = 45.722 \\ L_g \left[ \frac{ns^2}{\sigma^2} \right] &= F_{\chi^2(29)}^{-1}(0.025) = 16.047 \end{aligned}$$

Ceci se traduit par:

$$\Pr \left\{ 16.047 \leq \frac{ns^2}{\sigma^2} < 45.722 \right\} = \Pr \{ 2.6245 < \sigma^2 \leq 7.4780 \} = \Pr \{ 1.6200 < \sigma \leq 2.7346 \} = 0.95$$

### 5.2 Intervalles de confiance sur $m$

D'après la distribution 8, pour un  $\alpha$  fixé et selon la définition 6, les limites de confiance  $L_g$  et  $L_d$  de la variable aléatoire  $\left[\frac{\bar{x}-m}{s}\sqrt{n-1}\right]$  sont:

$$L_d \left[ \frac{\bar{x}-m}{s}\sqrt{n-1} \right] = F_{t(n-1)}^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) \quad \text{et} \quad L_g = -L_d \quad (11)$$

#### Exercice 3 Intervalles sur la tendance centrale

Pour  $\alpha = 0.05$ ,  $\bar{x} = 25$ ,  $s^2 = 4$  et  $n = 30$ , calculer les limites de confiance de  $m$ . D'après les tables de distribution  $t$  et compte tenu de la relation 11, les limites de confiance de  $\left[\frac{\bar{x}-m}{s}\sqrt{n-1}\right]$  sont:

$$L_d \left[ \frac{\bar{x}-m}{s}\sqrt{n-1} \right] = F_{t(29)}^{-1}(0.975) = 2.0452 \quad \text{et} \quad L_g \left[ \frac{\bar{x}-m}{s}\sqrt{n-1} \right] = -2.0452$$

Ceci se traduit par:

$$\Pr \left\{ -2.0452 \leq \frac{\bar{x}-m}{s}\sqrt{n-1} < 2.0452 \right\} = \Pr \{ 24.2404 < m \leq 25.7596 \} = 0.95$$

### 5.3 Intervalles de confiance sur $\lambda$

D'après les probabilités de la relation 9 et pour un  $\alpha$  fixé, les limites de confiance  $L_g$  et  $L_d$  de  $\lambda$  sont:

$$L_d[\lambda] = \frac{1}{2n} F_{\chi^2(2(n\bar{x}+1))}^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \quad \text{et} \quad L_g[\lambda] = \frac{1}{2n} F_{\chi^2(2n\bar{x})}^{-1} \left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (12)$$

#### Exercice 4 Intervalles sur le paramètre Poisson

Soient:

$$2, 1, 1, 0, 2, 1, 0, 2, 3, 1, 0, 1, 2, 2, 1, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 1, 1$$

les nombres de patients qui arrivent par intervalles de 15 minutes au bureau des entrées d'un hôpital dans un après-midi. On aura  $n = 23$  et  $n\bar{x} = 27$ . Pour  $\alpha = 0.05$ , d'après les tables de distribution  $\chi^2$  et compte tenu de la relation 12, les limites de confiance de  $\lambda$  sont:

$$L_d[\lambda] = \frac{1}{46} F_{\chi^2(56)}^{-1}(0.975) = \frac{78.5672}{46} = 1.7080$$

et

$$L_g[\lambda] = \frac{1}{46} F_{\chi^2(54)}^{-1}(0.025) = \frac{35.5863}{46} = 0.7736$$

avec estimation de  $\lambda = \bar{x} = 1.1739$ .

## 6 Propagation des erreurs de mesure

Les notions et calculs présentés concernent en général les phénomènes du hasard où depuis les observations obtenues au sein d'un échantillon, des modèles de probabilités sont mis au point pour décrire la population (à partir de laquelle l'échantillon a été tiré). En général, les observations sont des mesures effectuées selon une certaine technologie et soumises à des erreurs. Ces mesures peuvent ainsi être considérées comme des variables aléatoires.

Si  $x_0$  est la valeur vraie (inconnue) de la grandeur mesurée et  $x_i$  le résultat d'une mesure quelconque, l'erreur de mesure est définie par la relation  $e_i = x_i - x_0$  et le modèle le plus simple représentant un résultat  $x_i$  est donc  $x_i = x_0 + e_i$ . Dans de conditions expérimentales bien définies, la valeur probable de  $X$  peut être différente de  $x_0$ , par suite d'un mauvais étalonnage de l'appareil de mesure par exemple. Le modèle précédent sera alors affiné en introduisant une composante constante  $\varepsilon$  et une composante aléatoire  $\Delta$ :

$$x_i = x_0 + \varepsilon + \delta_i$$

où  $\delta_i$  est une valeur particulière de  $\Delta$ . La composante constante  $\varepsilon$  est choisie de façon que la valeur probable de la composante aléatoire  $\Delta$  soit nulle, c'est-à-dire, que  $\varepsilon$  soit l'écart entre la valeur probable de  $X$  et la valeur vraie  $x_0$ . Les quantités  $\varepsilon$  et  $\Delta$  sont appelées respectivement *erreur systématique* et *erreur aléatoire*. La figure 5 présente la définition des différentes erreurs de mesure.

La méthode de mesure est dite correcte si  $\varepsilon = 0$ , ce qui n'est pas toujours réalisé. Dans ce cas  $\varepsilon$  est un *biais* et il existe des démarches expérimentales qui permettent de le calculer. Par exemple, mesurer  $n'$  fois une grandeur connue  $y_0$  pour observer  $y_j, j = 1 : n'$ . Nous aurons:

$$x_i = x_0 + \varepsilon + \delta_i \quad \text{et} \quad y_j = y_0 + \varepsilon + \eta_j$$

En moyennant ces deux relations:

$$\bar{x} = x_0 + \varepsilon \quad \text{et} \quad \bar{y} = y_0 + \varepsilon$$

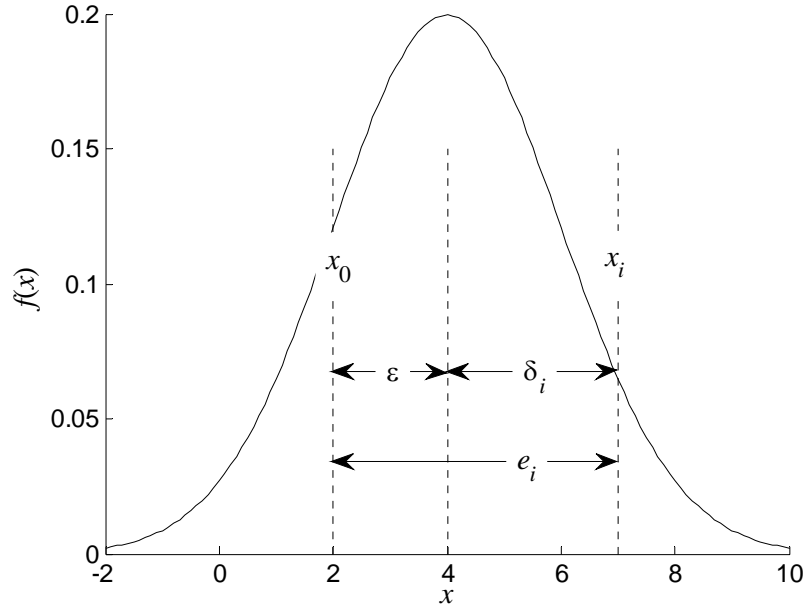


Figure 5: Définitions de l'erreur de mesure

et par résolution:

$$\varepsilon = \bar{y} - y_0 \quad \text{et} \quad x_0 = y_0 + (\bar{x} - \bar{y})$$

Une fois le biais  $\varepsilon$  évalué, la mesure peut être corrigée, mais la composante aléatoire reste toujours présente.

Par conséquent, l'erreur aléatoire de mesure sera considérée comme une variable aléatoire dont la tendance centrale est égale à zéro. Les précédents développements peuvent ainsi être utilisés pour analyser et modéliser l'erreur aléatoire. Plus particulièrement, nous étudierons l'erreur aléatoire résultant d'un dispositif expérimental qui peut être décrit par une relation fonctionnelle entre plusieurs facteurs aléatoires.

## 6.1 Espérance et variance d'une erreur de mesure

En section 2.2, nous avons montré comment calculer les PDF des nouvelles variables aléatoires obtenues par transformation des variables initiales. Quand la transformation n'est pas linéaire, la complexité des calculs rend cette démarche inapplicable en pratique. Devant ces difficultés, on cherche à obtenir simplement les caractéristiques de l'erreur aléatoire résultante en termes d'espérance et de variance de ces distributions. Les relations 1 et 2 peuvent être utilisées, mais elles dépendent aussi du modèle de probabilité. Plus modestement encore, on tâchera d'obtenir les caractéristiques correspondant à la tendance centrale et à la dispersion calculées à partir de l'échantillon. Effectivement, nous avons les relations 3 et 4. Au delà de ces résultats, nous continuerons nos développements: un modèle d'observations combinées plus complexe sera d'abord analysé, puis la présence de plusieurs sources d'erreurs sera étudiée.

### 6.1.1 Relation fonctionnelle non-linéaire

Soit la fonction  $z = h(x, y)$  de deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$ . On souhaite calculer  $\bar{z}$  et  $s_z$  à partir de  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ ,  $s_x$ ,  $s_y$  et  $s_{xy}$  obtenus sur un échantillon constitué par les observations concomitantes  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1 : n$ . S'il s'agit d'erreurs de mesure, on peut admettre que les réalisations ne s'écartent pas trop des valeurs les plus probables  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$ . La fonction  $h(x, y)$  peut être développée selon Taylor autour de la référence  $(\bar{x}, \bar{y})$  de la manière suivante:

$$z = h(x, y) = h(\bar{x}, \bar{y}) + \partial_x h(x, y)|_{x=\bar{x}, y=\bar{y}}(x - \bar{x}) + \partial_y h(x, y)|_{x=\bar{x}, y=\bar{y}}(y - \bar{y})$$

en négligeant les termes d'ordre supérieur à un. La figure 6 illustre le principe du développement de la fonction. C'est ainsi que  $h(x, y)$  a été linéarisée. En appelant:

$$\partial_x h(x, y)|_{x=\bar{x}, y=\bar{y}}(x - \bar{x}) = \partial_x \bar{h} \quad \text{et} \quad \partial_y h(x, y)|_{x=\bar{x}, y=\bar{y}}(y - \bar{y}) = \partial_y \bar{h}$$

pour simplifier l'écriture, nous pouvons:

- écrire la relation précédente pour toutes les observations et appliquer aux deux membres l'opérateur "moyenne"  $\frac{1}{n} \sum$ . On obtient:

$$\bar{z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(x_i, y_i) = h(\bar{x}, \bar{y})$$

- retrancher  $\bar{z}$  de la relation précédente, élever les deux membres au carré, puis appliquer l'opérateur "moyenne"  $\frac{1}{n} \sum$ . On obtient:

$$\begin{aligned} s_z^2 &= (\partial_x \bar{h})^2 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x - \bar{x})^2 + (\partial_y \bar{h})^2 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y - \bar{y})^2 \\ &\quad + 2 (\partial_x \bar{h}) (\partial_y \bar{h}) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x - \bar{x}) (y - \bar{y}) \\ &= (\partial_x \bar{h})^2 s_x^2 + (\partial_y \bar{h})^2 s_y^2 + 2 (\partial_x \bar{h}) (\partial_y \bar{h}) s_{xy} \end{aligned} \quad (13)$$

Cette dernière relation correspond à la relation 4, obtenue sous l'hypothèse d'un modèle linéaire avec  $a$  et  $b$  correspondant respectivement à  $(\partial_x \bar{h})$  et  $(\partial_y \bar{h})$ .

#### Exercice 5 Surface d'un rectangle (2)

On cherche à calculer la surface  $S = Ll$  à partir des mesures des longueurs des côtés  $L$  et  $l$ . Soient les indices numériques obtenus sur l'échantillon:

$$\bar{L} = 50 \text{ m} \quad \bar{l} = 20 \text{ m} \quad s_L = s_l = 0.1 \text{ m} \quad s_{Ll} = 0.01 \text{ m}^2$$

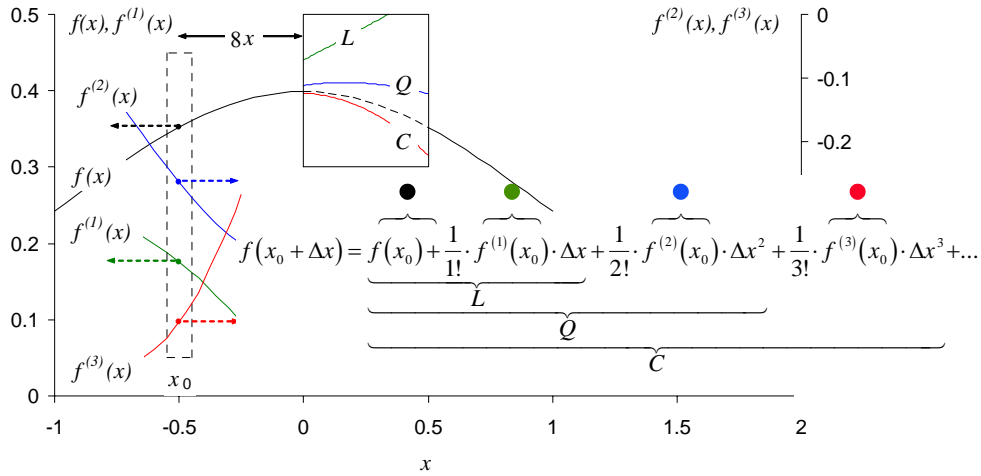
On aura:

$$\partial_L S = l \quad \partial_l S = L$$

$\bar{S} = 1000 \text{ m}^2$  et

$$\partial_L \bar{S} = 20 \text{ m} \quad \partial_l \bar{S} = 50 \text{ m}$$

L'application de la relation 13 donne  $s_S = 7 \text{ m}^2$ . Le coefficient de corrélation est maximal, égal à  $r_{Ll} = \frac{s_{Ll}}{s_L s_l} = 1$ . Si les mesures étaient indépendantes, on aurait d'après 13 avec  $s_{Ll} = 0$ ,  $s_S = 5.385 \text{ m}^2$  ce qui est  $< 7 \text{ m}^2$  car la corrélation est positive et  $(\partial_x \bar{h}) (\partial_y \bar{h}) > 0$ .



PRNT

3

A. ILIADIS

Figure 6: Développement d'une fonction en série Taylor

## Exercise 6 Calcul de la resistance (1)

On cherche à calculer la résistance  $R$  à partir des mesures sur l'intensité  $I$  et la différence de potentiel  $U = RI$ . Soient les indices numériques obtenus sur l'échantillon:

$$\bar{U} = 20 \text{ V} \quad \bar{I} = 0.5 \text{ A} \quad s_U = 1 \text{ V} \quad s_I = 0.01 \text{ A} \quad s_{UI} = 20 \text{ V A}$$

On aura:

$$\partial_U R = \frac{1}{\bar{I}} \quad \partial_I R = -\frac{U}{\bar{I}^2}$$

$\bar{R} = 40 \Omega$  et

$$\partial_U \bar{R} = \frac{1}{\bar{I}} = 2 \text{ A}^{-1} \quad \partial_I \bar{R} = -\frac{\bar{R}}{\bar{I}} = -80 \Omega \text{ A}^{-1}$$

L'application de la relation 13 donne  $s_R = 1.833 \Omega$ . Le coefficient de corrélation est égal à  $r_{UI} = \frac{s_{UI}}{s_U s_I} = 0.4$ . Si les mesures étaient indépendantes on aurait d'après 13 avec  $s_{UI} = 0$ ,  $s_R = 2.154 \Omega$  ce qui est  $> 1.833 \Omega$  car la corrélation est positive et  $(\partial_x \bar{h}) (\partial_y \bar{h}) < 0$ .

### 6.1.2 Plusieurs sources d'erreur

La relation 13 peut être mise sous une forme matricielle:

$$s_z^2 = \begin{bmatrix} \partial_x \bar{h} & \partial_y \bar{h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_x^2 & s_{xy} \\ s_{xy} & s_y^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial_x \bar{h} \\ \partial_y \bar{h} \end{Bmatrix}$$



Cette forme peut être généralisée pour la contribution dans la fonction  $z = h(x_1, \dots, x_p)$  de plusieurs sources d'erreurs  $X_i, i = 1 : p$ . Nous aurons:

$$s_z^2 = \begin{bmatrix} \partial_{x_1} \bar{h} & \partial_{x_2} \bar{h} & \dots & \partial_{x_p} \bar{h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{x_1}^2 & s_{x_1 x_2} & \dots & s_{x_1 x_p} \\ s_{x_1 x_2} & s_{x_2}^2 & \dots & s_{x_2 x_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{x_1 x_p} & s_{x_2 x_p} & \dots & s_{x_p}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial_{x_1} \bar{h} \\ \partial_{x_2} \bar{h} \\ \dots \\ \partial_{x_p} \bar{h} \end{Bmatrix}$$

Notons la symétrie de la matrice des variances-covariances. Comme précédemment pour la relation 5,  $s_z$  prend ses valeurs extrêmes quand  $|s_{x_i x_j}| = 1$ . En général si les erreurs sont indépendantes, nous avons une estimation intermédiaire de  $s_z$  donnée par:

$$s_z = \sqrt{\sum_{i=1}^p (\partial_{x_i} \bar{h})^2 s_{x_i}^2} \quad (14)$$

C'est la formule la plus utilisée pour évaluer la propagation des erreurs.

Il est important de préciser dans quelles conditions de mesure on doit s'attendre à une dépendance des erreurs. C'est le cas:

- d'une mesure influencée par la vitesse du vent et la présence de la poussière dans l'environnement: on doit s'attendre que le vent fort déplace une grande quantité de poussières,
- du calcul de la surface d'un terrain rectangulaire par le produit de ses côtés, mesurées à l'aide d'une corde caractérisée par une certaine élasticité,
- du calcul de la résistance électrique par un métrix possédant une composante électronique défaillante et qui affiche la tension et l'intensité du courant.

## 6.2 Calcul variationnel

Sans passer par la linéarisation de la fonction  $z = h(x_1, \dots, x_p)$ , le calcul variationnel peut renseigner sur la variance maximale de l'erreur résultante. En utilisant l'opérateur différentielle totale  $d$ , on obtient:

$$dz = \partial_{x_1} h(x_1, \dots, x_p) dx_1 + \dots + \partial_{x_p} h(x_1, \dots, x_p) dx_p$$

S'agissant d'erreurs de mesure, le différentiel total  $dx_i$  peut être remplacé par l'incertitude de la mesure  $s_{x_i}$  et la sensibilité  $\partial_{x_i} h(x_1, \dots, x_p)$  par sa valeur absolue évaluée pour les valeurs les plus probables  $\bar{x}_i$ . Nous aurons:

$$s_z = \sum_{i=1}^p |\partial_{x_i} h(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_p)| s_{x_i} \quad (15)$$

Cette évaluation de la propagation de l'erreur correspond au cas où toutes les erreurs sont dépendants,  $s_{x_i x_j} = s_{x_i} s_{x_j}$ .

### Exercice 7 Loi des gaz parfaits

La loi des gaz parfaits  $P = \frac{nRT}{V}$  donne la pression  $P$  en fonction du nombre de moles  $n$ , de la constante des gaz parfaits  $R$ , de la température  $T$  et du volume occupé par le gaz  $V$ . Si l'on souhaite obtenir la variance de l'erreur résultante sur  $P$ , ayant effectué des mesures sur  $n, T$  et  $V$ , on suggère d'abord de prendre le logarithme de deux membres de la relation de définition:

$$\ln P = \ln n + \ln R + \ln T - \ln V$$

puis appliquer le calcul variationnel:

$$\frac{dP}{P} = \frac{dn}{n} + \frac{dT}{T} - \frac{dV}{V}$$

La valeur maximale de s'écart-type sera égale à:

$$\frac{s_P}{P} = \frac{s_n}{n} + \frac{s_T}{T} + \frac{s_V}{V}$$

où  $\bar{n}$ ,  $\bar{T}$  et  $\bar{V}$  sont mes moyennes arithmétiques des mesures et  $\bar{P} = \frac{\bar{n}\bar{R}\bar{T}}{\bar{V}}$ .

### Exercice 8 Surface d'un rectangle (3)

De la relation  $S = Ll$  on obtient successivement:

$$\ln S = \ln L + \ln l$$

puis

$$\frac{dS}{S} = \frac{dL}{L} + \frac{dl}{l}$$

et à la fin:

$$\frac{s_S}{S} = \frac{s_L}{L} + \frac{s_l}{l}$$

Pour l'application numérique, on aura  $s_S = 7 \text{ m}^2$ , c'est l'écart-type maximal.

### Exercice 9 Calcul de la resistance (2)

De la relation  $R = \frac{U}{I}$  on obtient successivement:

$$\ln R = \ln U - \ln I$$

puis

$$\frac{dR}{R} = \frac{dU}{U} - \frac{dI}{I}$$

et à la fin:

$$\frac{s_R}{R} = \frac{s_u}{U} + \frac{s_I}{I}$$

Pour l'application numérique, on aura  $s_S = 2.80 \Omega$ , c'est l'écart-type maximal.

## 6.3 Théorème Central Limite

Ce théorème établit la convergence vers la loi normale sous des hypothèses peu contraignantes. Selon ce théorème, si la variable aléatoire  $Z$  est la somme de  $p$  variables aléatoires indépendantes  $X_i, i = 1 : p$  qui peuvent avoir des fonctions de distribution quelconques, alors sous certaines conditions (qui sont remplies en pratique), la fonction de distribution de  $Z$  pour  $p$  augmentant converge vers la distribution normale ayant comme espérance et variance respectivement:

$$E[Z] = \sum_{i=1}^p E[X_i] \quad V[Z] = \sum_{i=1}^p V[X_i]$$

Ce résultat veut dire qu'à force d'ajouter des telles variables, on finit par obtenir une loi normale. Ou encore, si l'erreur totale est la résultante d'un grand nombre de petites erreurs additives, sa distribution suivra le modèle normal. En pratique, quand les fonctions de distribution des  $X_i$  sont unimodales et ne s'écartent pas trop du profil normal, la distribution de  $Z$  est normale même avec  $p = 4$  ou  $5$ . Ce théorème permet ainsi d'affranchir les difficultés calculatoires pour obtenir les fonctions de distribution lors d'une transformation des variables aléatoires.

## 7 Conclusion

Nous avons présenté les notions de base pour modéliser les erreurs de mesure. Considérées comme des variables aléatoires à moyenne nulle, elles ont été étudiées à l'aide de leur fonction de probabilité et de leurs caractéristiques distributionnelles. Plus particulièrement, nous avons analysé l'influence de plusieurs facteurs aléatoires individuels sur l'erreur de mesure globale dans un dispositif décrit par une relation fonctionnelle.

Deux relations sont à retenir pour la variabilité de l'erreur, celle de la relation 14 quand les facteurs aléatoires sont indépendants et celle de la relation 15 évaluant l'écart-type maximal. Si l'on souhaite réduire cette variabilité, on peut identifier les contributions individuelles des facteurs aléatoires et intervenir sur ceux qui influencent majoritairement l'expression de l'erreur résultante.

## 8 Références

1. Saporta, G (1990) Probabilités, Analyse des Données et Statistique. Paris, Technip
2. Neuilly M, CETAMA (1993) Modélisation et Estimation des Erreurs de Mesure. Paris, Technique et Documentation, Lavoisier
3. Evans M, Hastings N, Peacock B (1993) Statistical Distributions, 2nd ed. New York: John Wiley